

1. zápočtová písemka z Matematiky II (BA02)

Ukázková písemka

Poznámky:

- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [4 b.] Mějme danu množinu

$$\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 ; xy > 1, x > 2, 4y + 2x - 9 < 0\}.$$

- (a) Nakreslete množinu Ω .
(b) Popište množinu Ω jako oblast I. a II. druhu.
(c) Převeďte dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} xy + 2y \, dx \, dy$$

na dvojnásobný a dále jej nepočítejte.

Řešení:

c) $\int_2^4 \int_{1/x}^{\frac{-2x+9}{4}} xy + 2y \, dy \, dx.$

2. [3 b.] Pomocí transformace do zobecněných polárních souřadnic odvoďte vzorec pro obsah elipsy (délky hlavních poloos volte obecně a, b).

Řešení:

$$S = ab\pi.$$

3. [4 b.] Necht

$$\Omega = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + z^2 = 1, |x| < \frac{1}{2}, |y| < 1, z > 0 \right\}.$$

- (a) Nakreslete množinu Ω .
(b) Převeďte trojný integrál $\iiint_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz$ na trojnásobný. Dále jej nepočítejte.
(c) Co zadaný integrál vyjadřuje?

Řešení:

b) $\int_{-1/2}^{1/2} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx.$ c) Objem množiny Ω .

4. [4 b.] Uvažujme množinu

$$\Omega = \{[x, y, z] \text{ in } \mathbb{R}^3 ; z > x^2 + y^2, z < 4\}.$$

- (a) Nakreslete množinu Ω .
(b) Pomocí transformace do cylindrických souřadnic vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz.$$

Řešení:

b) $\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\rho^2}^4 \rho \, dz \, d\rho \, d\varphi = 8\pi.$