

2. zápočtová písemka z Matematiky II (BA02)

Ukázková písemka

Poznámky:

- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [3 b.] Nechť křivka γ je oblouk funkce $f(x) = \ln x$ mezi body $A = [a, 0]$ a $B = [e, b]$

(a) Určete a, b .

(b) Nalezněte **alespoň dvě různé** parametrizace křivky γ .

(c) Křivkový integrál

$$\int_{\gamma} x^2 y + 1 \, ds$$

převeďte na jednoduchý a dále jej nepočítejte.

Řešení:

a) $a = 1, b = 1$. b) $x = t, y = \ln t, t \in (1, e)$ nebo $x = s^2, y = \ln s^2, s \in (1, e^{1/2})$. c) $\int_1^e (t^2 \ln t + 1) \sqrt{1 + 1/t^2} \, dt$.

2. [6 b.] Nechť je dáno vektorové pole

$$\vec{f}(x, y) = (y + 1, x)$$

a dále nechť křivka γ je horní půlkružnice se středem v počátku a s poloměrem $r = 1/2$ orientovaná proti směru hodinových ručiček.

(a) Pomocí integrálu druhého druhu vypočítejte práci vektorového pole \vec{f} při pohybu hmotného bodu po křivce γ .

(b) Ověřte, zda je vektorové pole potenciálové a pokud ano, tak potenciál najděte a s jeho pomocí ověřte svůj předchozí výpočet.

(c) Jak se změní výsledek, pokud pohyb hmotného bodu bude probíhat po úsečce z bodu $A = [-1/2, 0]$ do bodu $B = [1/2, 0]$. Proč?

Řešení:

a) -1 b) Potenciál $V(x, y) = xy + x + C$. c) Výsledek vyjde s opačným znaménkem, tedy 1.

3. [6 b.] Nechť je dána počáteční úloha:

$$\begin{aligned} y' &= xy + 2x, \\ y(1) &= 6. \end{aligned}$$

(a) Určete řád diferenciální rovnice. Rozhodněte, zda se jedná o rovnici lineární a pokud ano, tak určete, zda je homogenní. Svá tvrzení zdůvodněte.

(b) Najděte její řešení počáteční úlohy.

(c) Proveďte zkoušku.

Řešení:

a) Jedná se o lineární nehomogenní rovnici prvního řádu. b) $y(x) = 8e^{(x^2-1)/2} - 2$