2. zápočtová písemka z Matematiky II (BA02)

Skupina A

Poznámky:

- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [*3 b.*] Nechť křivka γ je úsečka mezi body $A = [1, -1, 0]$ a $B = [2, 0, -3]$.

   (a) Nalezněte **alespoň dvě různé** parametrizace křivky γ.

   (b) Křivkový integrál
   $$\int_\gamma (2yz - x)^2 \, \mathrm{d}s$$
   převeďte na jednoduchý a dále jej nepočítejte.

   (c) Co zadaný integrál reprezentuje?

   Řešení:
   a) $x = 1 + t, y = -1 + t, z = -3t, t \in \langle 0, 1\rangle$, nebo
   $x = 2 + s, y = s, z = -3 - 3s, s \in \langle -1, 0\rangle$.
   b) $\int_0^1 (5t - 6t^2 - 1)^2 \sqrt{11} \, \mathrm{d}t$.

2. [*6 b.*] Nechť je dáno vektorové pole
   $$\vec{f}(x, y) = (6xy \ , \ 3x^2 + 2y)$$
   a dále nechť křivka γ je oblouk funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ z bodu $A = [-4, -\frac{1}{4}]$ do bodu $B = [-1, -1]$.

   (a) Pomocí integrálu druhého druhu vypočítejte práci vektorového pole $\vec{f}$ při pohybu hmotného bodu po křivce γ.

   (b) Ověřte, zda je vektorové pole potenciálové a pokud ano, tak potenciál najděte a s jeho pomocí potvrďte svůj předchozí výpočet.

   (c) Jak se změní výsledek, pokud pohyb hmotného bodu bude probíhat po úsečce z bodu A do bodu B.

   Řešení:
   a) $\int_{-4}^{-1} 3 - 2\, t^{-3} dt = 10 - 1/16$.
   b) Potenciál $V(x, y) = 3x^2 y + y^2 + C$.
   c) Výsledek vyjde stejně. Integrál je nezávislý na integrační cestě.

3. [*6 b.*] Nechť je dána počáteční úloha:
   $$y' = -\frac{y}{x^2} + 3\mathrm{e}^{\frac{1}{x}},$$
   $$y(1) = 0.$$

   (a) Určete řád diferenciální rovnice. Rozhodněte, zda se jedná o rovnici lineární a pokud ano, tak určete, zda je homogenní.

   (b) Najděte řešení počáteční úlohy.

   (c) Proveďte zkoušku.

   Řešení:
   a) Jedná se o lineární nehomogenní rovnici prvního řádu.
   b) $y(x) = (3\, x - 3)\, \mathrm{e}^{x^{-1}}$.

2. zápočtová písemka z Matematiky II (BA02)

Skupina B

Poznámky:

- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [*3 b.*] Nechť křivka γ je úsečka mezi body $A = [0, -3, 1]$ a $B = [-1, 0, 1]$.
   (a) Nalezněte **alespoň dvě různé** parametrizace křivky γ.
   (b) Křivkový integrál
   $$\int_\gamma (yz - x)^2 \, \mathrm{d}s$$
   převeďte na jednoduchý a dále jej nepočítejte.
   (c) Co zadaný integrál reprezentuje?

   Řešení:
   a) $x = -t, y = -3 + 3t, z = 1, t \in \langle 0, 1\rangle$ nebo
   $x = -1 - s, y = 3s, z = 1, s \in \langle -1, 0\rangle$.
   b) $\int_0^1 (4t - 3)^2 \sqrt{10} \, \mathrm{d}t$.

2. [*6 b.*] Nechť je dáno vektorové pole
   $$\vec{f}(x, y) = (-y^3 + 2\ ,\ -3\,xy^2)$$
   a dále nechť křivka γ je oblouk funkce $f(x) = \sqrt{x}$ z bodu $A = [4, 2]$ do bodu $B = [16, 4]$.
   (a) Pomocí integrálu druhého druhu vypočítejte práci vektorového pole $\vec{f}$ při pohybu hmotného bodu po křivce γ.
   (b) Ověřte, zda je vektorové pole potenciálové a pokud ano, tak potenciál najděte a s jeho pomocí potvrďte svůj předchozí výpočet.
   (c) Jak se změní výsledek, pokud pohyb hmotného bodu bude probíhat po úsečce z bodu A do bodu B.

   Řešení:
   a) $\int_4^{16} -5/2\, t^{3/2} + 2dt = -968$.
   b) Potenciál $V(x, y) = -xy^3 + 2\,x + C$.
   c) Výsledek vyjde stejně. Integrál je nezávislý na integrační cestě.

3. [*6 b.*] Nechť je dána počáteční úloha:
   $$y' = 6x^2y + \mathrm{e}^{2x^3},$$
   $$y(1) = 0.$$
   (a) Určete řád diferenciální rovnice. Rozhodněte, zda se jedná o rovnici lineární a pokud ano, tak určete, zda je homogenní.
   (b) Najděte řešení počáteční úlohy.
   (c) Proveďte zkoušku.

   Řešení:
   a) Jedná se o lineární nehomogenní rovnici prvního řádu.
   b) $y(x) = (x - 1)\,\mathrm{e}^{2\,x^3}$.