

2. zápočtová písemka z Matematiky II (BA02)

Skupina A

Poznámky:

- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [3 b.] Mějme danu plochu

$$S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 = 4, z - x - y < 0, x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

- (a) Nakreslete plochu S .
(b) Pomocí křivkového integrálu určete obsah plochy S . Křivkový integrál převed'te na jednoduchý a dále jej nepočítejte.

Řešení:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4(\cos t + \sin t) dt.$$

2. [6 b.] Nechť je dáno vektorové pole

$$\vec{F}(x, y) = (2y^3 + 1, 6xy^2)$$

a dále nechť křivka γ je úsečka z bodu $A = [2, 0]$ do bodu $B = [-1, -1]$.

- (a) Pomocí křivkového integrálu druhého druhu vypočítejte práci vektorového pole \vec{F} při pohybu hmotného bodu po křivce γ .
(b) Ověřte, zda je vektorové pole potenciálové a pokud ano, tak potenciál najděte a s jeho pomocí potvrďte svůj předchozí výpočet.

Řešení:

a) $\int_0^1 24t^3 - 12t^2 - 3dt = -1.$

b) Potenciál $V(x, y) = 2xy^3 + x + C.$

3. [6 b.] Nechť je dána počáteční úloha:

$$y' = y \sin x + \sin x,$$
$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

- (a) Určete řád diferenciální rovnice. Rozhodněte, zda se jedná o rovnici lineární a pokud ano, tak určete, zda je homogenní.
(b) Najděte řešení počáteční úlohy.

Řešení:

$$y(x) = -1 + 3e^{-\cos(x)}.$$

2. zápočtová písemka z Matematiky II (BA02)

Skupina B

Poznámky:

- *Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.*

1. [3 b.] Mějme danu plochu

$$S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 ; x^2 - y = 0 , z - x - y < 1 , 0 < x < 2 , y > 0 , z > 0 \} .$$

- (a) Nakreslete plochu S .
(b) Pomocí křivkového integrálu určete obsah plochy S . Křivkový integrál převed'te na jednoduchý a dále jej nepočítejte.

Řešení:

$$\int_0^2 (1 + t + t^2) \sqrt{1 + 4t^2} dt.$$

2. [6 b.] Nechť je dáno vektorové pole

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{xy}{2} , \frac{x^2}{4} + 2 \right)$$

a dále nechť křivka γ je úsečka z bodu $A = [0, 4]$ do bodu $B = [0, -2]$.

- (a) Pomocí křivkového integrálu druhého druhu vypočítejte práci vektorového pole \vec{F} při pohybu hmotného bodu po křivce γ .
(b) Ověřte, zda je vektorové pole potenciálové a pokud ano, tak potenciál najděte a s jeho pomocí potvrďte svůj předchozí výpočet.

Řešení:

a) $\int_0^1 -12 - 9/2 t^2 + 2 t dt = -12$.

b) Potenciál $V(x, y) = \frac{x^2 y}{4} + 2y + C$.

3. [6 b.] Nechť je dána počáteční úloha:

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}},$$
$$y(0) = -1.$$

- (a) Určete řád diferenciální rovnice. Rozhodněte, zda se jedná o rovnici lineární a pokud ano, tak určete, zda je homogenní.
(b) Najděte řešení počáteční úlohy.

Řešení:

$$y(x) = 1 - 2e^{-2\sqrt{x}}.$$

2. zápočtová písemka z Matematiky II (BA02)

Skupina C

Poznámky:

- Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [4 b.] Nechť křivka γ je oblouk funkce $f(x) = \sin x$ mezi body $A = [0, 0]$ a $B = [\pi, ?]$.

(a) Nalezněte **alespoň dvě různé** parametrizace křivky γ .

(b) Křivkový integrál

$$\int_{\gamma} \frac{x}{2y} ds$$

převeďte na jednoduchý a dále jej nepočítejte.

Řešení:

a) např. $x = t, y = \sin t, t \in \langle 0, \pi \rangle$ nebo $x = 2u, y = \sin 2u, u \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

b) např. $\int_0^{\pi} \frac{t}{2 \sin t} \sqrt{1 + \cos^2 t} dt$

2. [6 b.] Nechť je dáno vektorové pole

$$\vec{F}(x, y, z) = (2xz, 3y^2, x^2)$$

a dále nechť křivka γ je úsečka z bodu $A = [-1, 0, 2]$ do bodu $B = [-1, 3, 4]$.

(a) Pomocí křivkového integrálu druhého druhu vypočítejte práci vektorového pole \vec{F} při pohybu hmotného bodu po křivce γ .

(b) Ověřte, zda je vektorové pole potenciálové a pokud ano, tak potenciál najděte a s jeho pomocí potvrďte svůj předchozí výpočet.

Řešení:

a) $\int_0^1 81t^2 + 2 dt = 29$,

b) Potenciál $V(x, y, z) = x^2 z + y^3 + C$.

3. [6 b.] Nechť je dána diferenciální rovnice:

$$y' = -3y + 2.$$

(a) Určete řád diferenciální rovnice. Rozhodněte, zda se jedná o rovnici lineární a pokud ano, tak určete, zda je homogenní.

(b) Najděte její obecné řešení.

(c) Označme $y(x)$ koncentraci soli v nádrži v čase x . Nechť tato koncentrace je dána zadanou diferenciální rovnicí. Víme, že v čase $x = 0$ byla koncentrace soli $y(0) = 2 \text{ kg m}^{-3}$. Jaká bude koncentrace v čase $x = 3$ hodin.

Řešení:

a) Jedná se o lineární nehomogenní rovnici prvního řádu.

b) $y(x) = 2/3 + C e^{-3x}$.

c) $C = 4/3, y(3) = 2/3 + 4/3 e^{-9}$

2. zápočtová písemka z Matematiky II (BA02)

Skupina D

Poznámky:

- Nezaručuji správnost řešení ani to, že jsou vyjádřena v nejvhodnějším tvaru.

1. [4 b.] Nechť křivka γ je oblouk funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ mezi body $A = [1, 1]$ a $B = [2, ?]$.

(a) Nalezněte **alespoň dvě různé** parametrizace křivky γ .

(b) Křivkový integrál

$$\int_{\gamma} 2x + y^2 \, ds$$

převeďte na jednoduchý a dále jej nepočítejte.

Řešení:

a) např. $x = t, y = \frac{1}{t^2}, t \in \langle 1, 2 \rangle$ nebo $x = 2u, y = \frac{1}{4u^2}, u \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$

b) např. $\int_1^2 (2t + \frac{1}{t^4}) \sqrt{1 + \frac{4}{t^6}} \, dt$

2. [6 b.] Nechť je dáno vektorové pole

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{y^2}{2}, xy, 2z \right)$$

a dále nechť křivka γ je úsečka z bodu $A = [0, -1, 3]$ do bodu $B = [-1, -1, 5]$.

(a) Pomocí křivkového integrálu druhého druhu vypočítejte práci vektorového pole \vec{F} při pohybu hmotného bodu po křivce γ .

(b) Ověřte, zda je vektorové pole potenciálové a pokud ano, tak potenciál najděte a s jeho pomocí potvrďte svůj předchozí výpočet.

Řešení:

a) $\int_0^1 \frac{23}{2} + 8t \, dt = \frac{31}{2}$,

b) Potenciál $V(x, y, z) = \frac{xy^2}{2} + z^2 + C$.

3. [6 b.] Nechť je dána diferenciální rovnice:

$$y' = -\frac{y}{2} + 1.$$

(a) Určete řád diferenciální rovnice. Rozhodněte, zda se jedná o rovnici lineární a pokud ano, tak určete, zda je homogenní.

(b) Najděte její obecné řešení.

(c) Označme $y(x)$ koncentraci soli v nádrži v čase x . Nechť tato koncentrace je dána zadanou diferenciální rovnicí. Víme, že v čase $x = 0$ byla koncentrace soli $y(0) = 2 \text{ kg m}^{-3}$. Jaká bude koncentrace v čase $x = 4$ hodin.

Řešení:

a) Jedná se o lineární nehomogenní rovnici prvního řádu.

b) $y(x) = 2 + C e^{-x/2}$.

c) $C = 2, y(4) = 2 + 2 e^{-2}$