

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice:

$$y'' + y = \sin x.$$

ŘEŠENÍ METODOU NEURČITÝCH KOEFICIENTŮ

1) Řešení přidružené homogenní rovnice $y'' + y = 0$

Charakteristický polynom: $\lambda^2 + 1 = 0$
 $\lambda = \pm i$

$$\Rightarrow y_1 = \cos x \quad y_2 = \sin x$$

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

2) Nalezení partikulárního řešení

Partikulární řešení budeme hledat ve tvaru

$$y_p = x \cdot (A \cos x + B \sin x) \\ = Ax \cos x + Bx \sin x$$

$$y_p' = A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x$$

$$y_p'' = -A \sin x - A \sin x - Ax \cos x + B \cos x + B \cos x - Bx \sin x$$

Dosažením do zadané rovnice dostáváme:

$$-A \sin x - A \sin x - Ax \cos x + B \cos x + B \cos x - Bx \sin x + Ax \cos x + Bx \sin x = \sin x$$

Porovnáním koeficientů u funkcí $\cos x$ a $\sin x$ dostáváme

$$\cos x: 2B = 0$$

$$\sin x: -2A = 1$$

$$\Rightarrow B = 0 \\ A = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_p = -\frac{x}{2} \cos x$$

3) Obecné řešení $y = y_h + y_p$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

ŘEŠENÍ METODOU VARIACE KONSTANT

1) Řešení přidružené homogenní rovnice $y'' + y = 0$

stejně jako při metodě neurčitých koeficientů

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

2) Řešení původní nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x, \quad C_1(x), C_2(x) = ?$$

Vyřešíme soustavu pro neznámé $C_1'(x), C_2'(x)$:

$$C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0$$

$$-C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \sin x$$

Můžeme ji zapsat i v maticové tvaru:

$$\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin x \end{bmatrix}$$

Vyřešíme užitím Cramerova pravidla:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{0 - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = -\sin^2 x$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sin x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \sin x \cos x$$

$$C_1(x) = \int -\sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin x \cos x - \frac{1}{2} x + \bar{C}_1$$

$$C_2(x) = \int \sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{2} \cos^2 x + \bar{C}_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \sin x \cos^2 x - \frac{1}{2} x \cos x + \bar{C}_1 \cos x - \frac{1}{2} \cos^2 x \sin x + \bar{C}_2 \sin x; \bar{C}_1, \bar{C}_2 \in \mathbb{R}$$